

京都大学若手人材海外派遣事業 ジョン万プログラム  
研究者派遣プログラム

成果報告書

提出日：平成28年8月18日

【基本情報】

○申請者

採 択 年 度：平成27年度  
部 局 名 等：大学院理学研究科数学・数理解析専攻  
職 名：准教授  
氏 名：加藤 周  
研 究 課 題 名：幾何学的表現論の研究

○渡航先

国 名：アメリカ  
研 究 機 関 名：マサチューセッツ工科大学  
研 究 室 名 等：数学科・教授・ジョージ・ルスティック  
渡 航 期 間：平成27年9月1日～平成28年7月21日（307日）

○渡航期間中の出張

出 張 先：京都大学大学院理学研究科  
目 的：学生指導のため  
期 間：平成27年12月30日～平成28年1月7日  
平成28年1月13日～平成28年1月16日

出 張 先：東京大学大学院数理科学研究科  
目 的：勉強会の主催  
期 間：平成28年1月8日～平成28年1月12日

出 張 先：ニューヨーク州立大学・ストーニーブルック校  
目 的：研究集会への参加  
期 間：平成28年1月17日～平成28年1月31日

出 張 先：ノースカロライナ州立大学・チャペルヒル校  
目 的：研究打ち合わせ  
期 間：平成28年4月13日～平成28年4月15日

出 張 先：バージニア大学  
目 的：研究集会への参加  
期 間：平成28年5月24日～平成28年5月28日

# 京都大学若手人材海外派遣事業 ジョン万プログラム 研究者派遣プログラム

## 【成果】

### ○プロジェクトの成果及び今後の展開

#### ・研究概要

表現論において基本的な多様体として旗多様体がある。この多様体は複素単純リー群の商空間として定義され、それらと密接に関わる代数系である単純リー環、量子群などと呼ばれる代数系およびその表現の研究と深い関わりを持つ。実際、上記の代数系の表現は直線束、微分作用素のなす層の加群などといった旗多様体上の幾何学的構造物を經由することにより実現される。そして、幾何学的構造物の内部構造と表現論的に重要な情報を結びつけることによりしばしば表現論における代数的考察では容易には示すことのできない深い結果に証明が与えられてきた(後に代数的証明が与えられた場合でも幾何学的構造物に対応する補助的な概念が用いられることがしばしば存在する)。

その中でも有名なものの一つが Kazhdan と Lusztig により提出された単純リー代数の既約表現(基本的な興味の対象)と標準表現群(構成自体は比較的容易であるような表現)の関係を示す旗多様体の交叉コホモロジーを用いて記述するという Kazhdan-Lusztig 予想(Beilinson-Bernstein-Brylinski-柏原の定理)である。この予想は旗多様体の交叉コホモロジー自身をヘッケ環とよばれる補助的代数系の構造定数に帰着するもので、単純リー環(やその量子群)だけではなく一般のカッツ・ムッディーリー環(やその量子群)に対しても類似の予想がある。このような予想は特にアフィン・リー環の時に柏原-谷崎により深く研究されたが、臨界レベルと呼ばれる状況において(のみ)は長い間対応する結果が知られていなかった。その理由の一つとして臨界レベルの表現論に対応する旗多様体の自然な類似物は半無限旗多様体と呼ばれるものであり、Feigin-Frenkel による考察こそあるものの、それがそのままでは厳密には正当化できないものであった事情がある。現在、臨界レベルの Kazhdan-Lusztig 予想そのものに関しては Frenkel-Gaitsgory や Gaitsgory を中心とするグループによる研究があり、次第にわかってきてはいるものの、Feigin-Frenkel による考察とは異なる手法に依存する部分が多い。

半無限旗多様体にはいくつかのかなり挙動の異なる親戚が存在し、それらのうちの一つとして代数曲線から最初の意味の旗多様体への(擬)写像全体の空間が存在する。特に、半無限旗多様体上の交叉理論を考えることは旗多様体上の量子コホモロジーを考えることに対応する。また、このような交叉理論(の極限)自体にカレント代数とよばれるアフィン・リー環の変種を用いた表現論的な意味があるということが Braverman-Finkelberg の一連の論文により示された。この構成は有限旗多様体の交叉理論の Schechtman-Mukhin-Varchenko による解釈と密接な関係を持つはずであるが、現在までのところその部分は理解できていない。

さて、上記のような状況で報告者は半無限多様体のさまざまなモデルの基礎的な部分を元々の旗多様体の状況と同じレベルまで精密化することを試みた。その結果以下のような結果を得ることができた：

- 1) まず半無限旗多様体を(擬)写像としてみるモデルにおいて、Braverman-Finkelberg により示された直線束のコホモロジー公式を同様の構成で得られる全ての良い部分多様体(シューベルト多様体と呼ばれるもの)に対して示すことができた。また、その中でそのような多様体がある意味で正規多様体であること、および Braverman-Finkelberg の公式が満たす差分作用素系の表現論的な意味づけを明確にすることができた。この結果は既に論文の形にまとめて現在投稿中である。
- 2) 次に半無限旗多様体を等質空間としてみるモデルにおいても(擬)写像モデルの場合と同様の結果が成り立つことを示した。このことは特に Braverman-Finkelberg の一連の仕事の中で予想として残ってしまっていたこのモデルの半無限旗多様体の基本的性質を確立したことを含んでいる。この結果から、半無限旗多様体の同変グロタンディーク群の良いと思われる定義が導かれた。また、内藤聡氏、佐垣大輔氏の示した結果と合わせるにより旗多様体の交叉理論の一側面であるシェバレー公式の半無限旗多様体版を量子

## 京都大学若手人材海外派遣事業 ジョン万プログラム 研究者派遣プログラム

ループ代数の表現論の言葉で記述することに成功した。この結果は今後1～2か月以内に論文の形にまとめる予定である。

3) 上のような半無限旗多様体のモデルを用いて Feigin-Frenkel の構成に手を加えることにより、アフィン・リー環の臨界レベルの表現論に対応する半無限旗多様体の微分作用素の層の加群の言葉で書くことができるかと確信している。特に、この場合の Kazhdan-Lusztig 予想 (Frenkel-Gaiitsgory の定理) がより直接的に証明できるように思われる。この結果はまだ技術的細部の詰めにはしばらく時間がかかると思われるが年度内には論文の形にまとめて発表したいと考えている。

以上のような一連の研究によって半無限旗多様体にまつわる表現論と幾何学の状況を存在こそするものの旗多様体と呼ぶからには当然あってしかるべき結果が示されていないため使い勝手が悪いという状況から、とりあえず古典的にわかっていることの類似物はそれぞれ存在するという状況へ改善できたといえるのではないかと考えている。ただし、交叉理論のより深い理解にせよ、アフィン・リー環やカレント代数の表現論にせよ代数的考察、もしくは共型場理論など場の理論の要請からは存在してしかるべき幾何学的な構成の中でおも欠けているものがいくつか存在する。今後、それらの部分をさらに補ってゆくことにより量子コホモロジーの世界とアフィン・リー環の臨界レベルの表現論やカレント代数の表現論の世界、そして共型場理論の世界を幾何学的な視点からつなぎ、この種の理論に潜んでいるふしぎなつながりのいくつかを解き明かしたい。

### ・国際共同研究の立上げ・ネットワークの構築

本研究期間中にニューヨーク州立大学ストーニーブルック校を訪れ、そこで上記の研究と関連するアイデアを Michel Finkelberg 教授と議論した。その後 e-mail 等による連絡を経て 2016 年 9 月に彼をモスクワに訪問してさらなる議論を行う予定である。また、彼を介した e-mail の交換を通じて同大の Evgeny Feigin 准教授とも議論を行っている。

また、同期間中にノースカロライナ州立大学チャペルヒル校を訪れ、やはり上記の研究と関連するアイデアなどを Shrawan Kumar 教授ならびに Ivan Cherednik 教授と議論した。Shrawan Kumar 教授とはその後 e-mail 等によって連絡を取っていて、今年の冬に京都に招待することを計画している。Ivan Cherednik 教授も彼独特の話法と考え方についてこちらの理解がもう少し進んだのちにもう少し議論を続けたいと考えている。

### ・国際共著論文の投稿・発表等の状況、国際学会等での発表状況 [予定を含む]

このプログラム中に幾つか共同で議論を始めた話はあるが、現段階では論文として発表すべき結果と言える形にまでは至ったものはない。

### ・在外研究経験によって習得した能力等

渡航先機関である MIT は表現論関係では世界でも有数の研究機関であり、さまざまなレベルで非常に優秀な人材がそろっていた。そういった中でいろいろなセミナーに出席しかつ周りの研究者と討論することで現在研究を進めている半無限旗多様体の期待される性質、その性質の応用の可能性などに関していくつかのアイデアを得ることができた。

また、学生から教員までの人員が多くさらに複数の分野の教員の間で似た方向の研究が施行されていることなどもあり、大学院生～ポスドク向けのさまざまなレベルの入門セミナーを教員が企画していたこと、およびボストン近郊の複数の大学からの総計とはいえ多いものでは各々 50～60 人の参加があったことは非常に印象的であった。大学院低学年向けのセミナーは提供されるピザを食べるために数回参加したのみではあるが、大学院生～ポスドク向けのセミナーの内容は個人的には非常にありがたかった。

## 京都大学若手人材海外派遣事業 ジョン万プログラム 研究者派遣プログラム

また、ホストであるルスティック教授の研究室には大学院学生が(基本的に常に)一人という周囲の状況から見ると割合贅沢な状況であり、その指導法としては自分のアイデアに沿った問題を適宜与えてトレーニングをさせるということに主眼があるように思われた。このような方針を取ると当然学生が大学院修了後に立ち立つ段階において壁があるわけであるが、そこは基本的には機会ごとに助言と問題提起を行うという形でのフォローをしている様に見えた。

### ・在外研究経験を活かした今後の展開

MITでの滞在で分かったことのひとつは積極的に同分野または近い分野の有名な先生と議論を行うことには(例え直接的に共同研究に発展しなくても)きちんと意義があるということである。なので、今後は今回の在外研究中に得た伝手などを通じてより多くの議論をできるように積極的に外国の有名な先生の出張/招聘(とそれを通じた議論、共同研究)を試みる。

MITの学生指導方針は、基本的には多くのアメリカやヨーロッパの大学と同様で、大学院生が標準的に学ぶべき内容については個別ではなく共通化されたセミナーを行うなど(京都大学、もっといえば日本の多くの大学と比較して)教員の干渉量が低く抑えられる一方、研究指導においては(やはり日本の大学と比較して)個々の学生に対して濃密な指導を行うというものであるように見受けられた。

前者に関してはそのままだと学部・部局全体の問題で何かができるわけではないが、他大学の同一分野の研究室と協力して基本的には学生やポスドクに各分野の説明をリレー形式でやってもらうような勉強会を継続して行ってゆくという形で同様の効果を狙おうと考えている。

後者に関してはそもそもアメリカと日本では(数学の)修士号の意味が違うので比較は難しい。ただ、日本では修士論文があること、理学研究科は大学院生の(外国人)副指導教員制度があることなどを鑑みると、先端コースの学生にはある程度問題を具体的に示唆するなどよりアメリカ風の指導をし、その結果を持って博士課程の問題設定は(できれば)副指導教員などの力も借りるという形でやるのが良いのではないかと思う。そうすると結局問題設定能力が十分につかないまま博士号まで取ってしまう学生が出る可能性がある。卒業後も少なくとも数年間は進路指導的なことをする必要が出てくる可能性はあるが、そこもできる範囲ではフォローしたいと考えている。

京都大学若手人材海外派遣事業 ジョン万プログラム  
研究者派遣プログラム

英文成果報告書

○申請者情報

部 局 名 : (英 語) Graduate School of Science, Kyoto University  
職 名 : (英 語) Associate Professor  
氏 名 : (英 語) Syu Kato  
研究課題名 : (英 語) Study in geometric representation theory  
渡 航 期 間 : September 1<sup>st</sup> 2015–July 21<sup>st</sup> 2016

○渡航先情報

国 名 : (英 語) United States  
研究機関名 : (英 語) Massachusetts Institute of Technology  
研究室名等 : (英 語) Department of Mathematics  
受入研究者名 : (英 語) George Lusztig

○渡航報告

I have visited Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology from September 1st 2015 to July 21 2016. The building of MIT Mathematics Department was under renovation during the 2015 Fall semester and the new building was available from 2016 Spring semester. The building in 2015 Fall was little small, but somehow impressive as the offices of many famous researcher in my subjects are arranged in a row. For the renovated building, the ceil was impressively high even though I was told that they made an additional floor. The research environment at MIT was not too different from that of Kyoto university at the level of physical facilities except for the fact that they do not have an independent library for mathematics (as we have in Kyoto).

The number of faculties of MIT is about 55 (excluding Emeritus Professor), so the number also does not differ so much from that of Department of Mathematics (in Kyoto University). In fact, we have more professors at Kyoto if we count RIMS and mathematicians from other departments.

However, there are two serious differences. One is the visitors from other universities (like me), that include more than 10 visiting professors who has faculty position at some other university. The other is the existence of research universities in the same area, that includes Harvard, Northeastern, Boston college, Tufts university, among others. MIT is located in the middle of Harvard and Northeastern, and actually many of the seminars are held jointly and the total number of researchers in the whole of these universities is far more than that in Kyoto.

There are at least two seminars in representation theory at MIT. One is infinite-dimensional representation theory seminar lead by Professor Kac and Etingof, and the other is the seminar on representation theory of Lie groups and algebraic groups lead by Professor Lusztig and Vogan. In addition to that, there are many graduate seminars of various levels. I attended some seminar on etale cohomology lead by Etingof (to eat some pizza) and seminar on K3 surfaces lead by Losev, and some other seminars. Some of the seminar talks contain very fresh or even on-going material so that I could see how people develop mathematics around here. This was one nice feature that I have never experienced.

During my stay, I discussed couples of time with Prof. Lusztig, Bezrukavnikov, and Arakawa (actually he is a colleague at Kyoto visiting MIT by the same program) among others. In addition to this, I used this occasion to visit SUNY at Stony Brook for two weeks and discussed with Professor Finkelberg (HSE at Moscow), University of North Carolina Chapel Hill few days to discuss with Professor Kumar and Cherednik, Virginia University a week to

## 京都大学若手人材海外派遣事業 ジョン万プログラム 研究者派遣プログラム

discuss with Professor Shimozono and Orr (Virginia Tech.), and University of Massachusetts at Amherst in a weekend to discuss with Professor Sommers.

Also, Professor Lusztig kindly invited me to his house in some occasion and I could talk a little bit with his current graduate student from South Korea.

In my visit at MIT, I have tried to change my subject a little bit. I am a geometric representation theorist who have been studied mainly some geometric extension algebras that knows representation theory of affine Hecke algebras (and hence that of  $p$ -adic groups in a sense) and Khovanov-Lauda-Rouquier algebra for example. The module categories of these algebras yield examples of “affine highest weight category”, but there are some missing examples in my research. In fact, there are two important examples that I could not capture my previous results, one is the representation theory of quantum loop algebras (and its degenerations including Yangians and current algebras) and the other is the representation theory of affine Lie algebras at the critical level. Interestingly, both of these algebras are somehow related to the geometry of so-called semi-infinite flag manifolds. As Professor Lusztig was one of the initiator of the combinatorial side of such story and Professor Bezrukavnikov was one of the main contributor in linking these things to some other geometry, I was very happy to discuss with them.

However, 10 and half months was not long enough for me to concretize the new idea in new subject for me (actually I lost my last 3 weeks by unfortunately trapped in a scam), and I could give only one public research talk at UNC Chapel Hill. Despite of this, I still feel that I could reasonably cultivated some foundational part of the theory of semi-infinite flag manifold that makes it as a true object to study in the future. I posted the first part of my work on semi-infinite flag manifolds to the arXiv (1605.04953) on May. As the research proceeds towards the end of my stay at MIT, I am expecting to post one more paper on this subject until October (probably joint with Prof. Naito at Tokyo Institute of Technology and Prof. Sagaki at Tsukuba University as they provide some combinatorial interpretation that I could not obtain by my method), and hope to finish up yet one another paper until next March.